

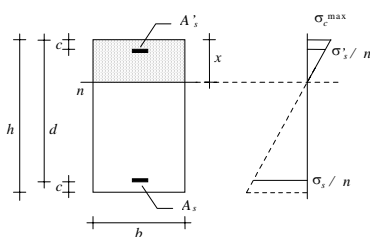
Progetto e verifica di elementi strutturali in c.a.

3 - Flessione semplice

Bologna
3-4 maggio 2012
Edoardo M. Marino

Verifica di sezioni inflesse

Verifica - tensioni ammissibili

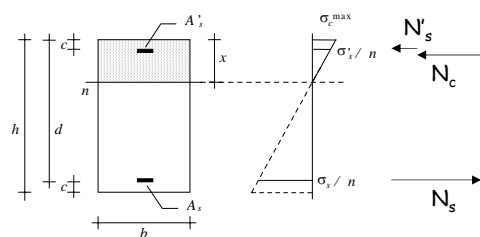


Dati:
Geometria della sezione
Armature

Incognite:
Posizione dell'asse neutro
Tensioni massime

3/70

Verifica - tensioni ammissibili

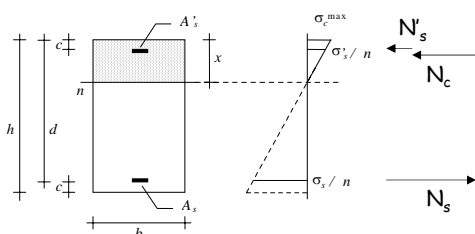


Per trovare l'asse neutro: $N_c + N'_s + N_s = 0$
(equilibrio alla traslazione)

oppure ...

4/70

Verifica - tensioni ammissibili



Per trovare l'asse neutro: $S_n = 0$
(l'asse neutro è baricentrico)

5/70

Verifica - tensioni ammissibili

Equazione di secondo grado, con soluzione:

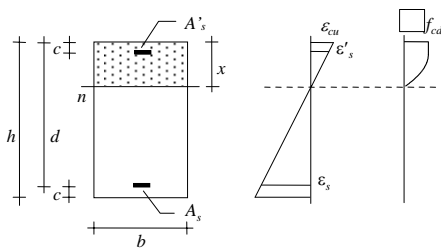
$$x = \frac{n(A_s + A'_s)}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2b(A_s d + A'_s c)}{n(A_s + A'_s)^2}} \right]$$

E poi: $\sigma = -\frac{M}{I} y$

con: $I = \frac{b x^3}{3} + n A'_s (x - c)^2 + n A_s (d - x)^2$

6/70

Verifica - stato limite ultimo

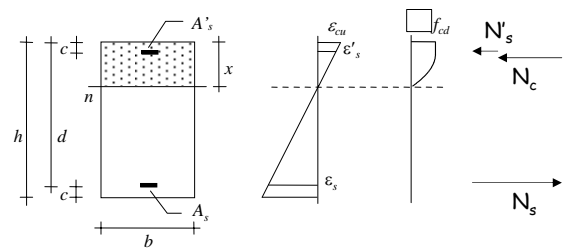


Dati:
Geometria della sezione
Armature

Incognite:
Posizione dell'asse neutro
Momento resistente

7/70

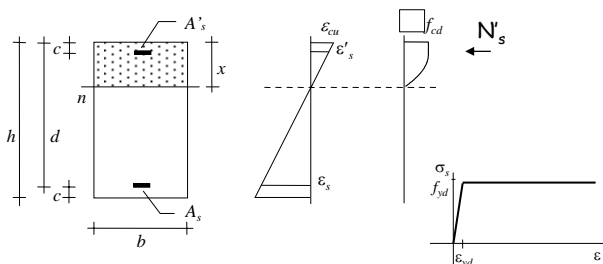
Verifica - stato limite ultimo



Per trovare l'asse neutro: $N_c + N'_s + N_s = 0$
(equilibrio alla traslazione)

8/70

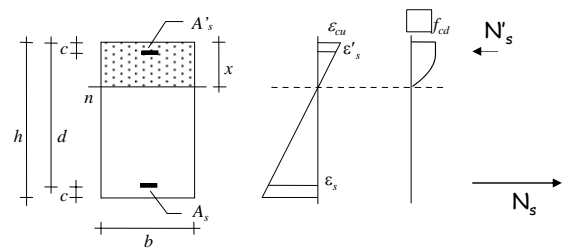
Imporre questa condizione è facile, perché:



$$\epsilon'_s = \frac{x-c}{x} \epsilon_{cu} \quad \text{in molti casi } \epsilon'_s > \epsilon_{yd} \Rightarrow N'_s = A'_s f_{yd}$$

$$\text{se } \epsilon'_s \leq \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \frac{\epsilon'_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} \Rightarrow N'_s = A'_s \sigma'_s$$

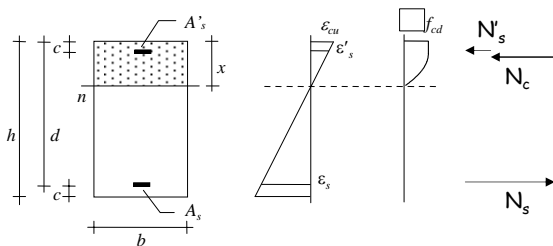
Imporre questa condizione è facile, perché:



$$\text{si ha sempre } \epsilon_s > \epsilon_{yd} \Rightarrow N_s = A_s f_{yd}$$

10/70

Imporre questa condizione è facile, perché:



Il coefficiente β tiene conto del fatto
che la tensione nella parte compressa
non è costante

$$N_c = \beta \cdot b \times f_{cd}$$

per sezione rettangolare, $\beta = 0.810$

Individuazione dell'asse neutro

$$N_c + N'_s + N_s = 0$$



$$\beta \cdot b \times f_{cd} + A'_s \sigma'_s - A_s f_{yd} = 0$$

12/70

Individuazione dell'asse neutro

Se $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (o quando non vi è armatura compressa) la condizione di equilibrio è una equazione di primo grado:

$$\beta b x f_{cd} + A'_s f_{yd} - A_s f_{yd} = 0$$

13/70

Individuazione dell'asse neutro

Se $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (o quando non vi è armatura compressa) la condizione di equilibrio è una equazione di primo grado, con soluzione:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}}$$

In caso contrario diventa una equazione di secondo grado

$$\beta b x f_{cd} + A'_s \frac{x - c}{x} \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} - A_s f_{yd} = 0$$

14/70

Individuazione dell'asse neutro

Se $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (o quando non vi è armatura compressa) la condizione di equilibrio è una equazione di primo grado, con soluzione:

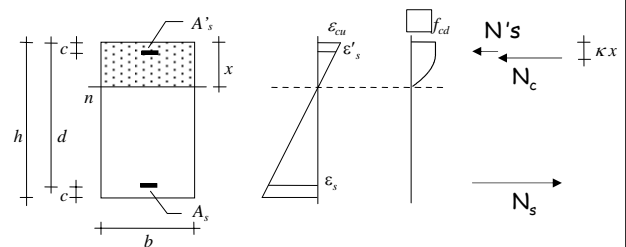
$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}}$$

In caso contrario diventa una equazione di secondo grado, con soluzione analoga a quella delle tensioni ammissibili

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2 \beta b f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2 \beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c f_{yd}}{\beta b f_{cd}}}$$

15/70

Momento resistente



Si determina imponendo l'equilibrio alla rotazione (rispetto a un punto qualsiasi)

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) + N'_s (\kappa x - c)$$

per sezione rettangolare, $\kappa = 0.416$

Esempio n. 1 verifica di sezione rettangolare

Dati:		$M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$
Sezione	30x50	Calcestruzzo C25/30
Armature	$A_s = 4\varnothing 20$ $A'_s = 2\varnothing 14$	Acciaio B450C

Procedura:

- 1 - individuazione dell'asse neutro
(si può ipotizzare che l'armatura compressa sia snervata, controllare se è vero e in caso contrario passare all'equazione di secondo grado)
- 2 - determinazione del momento resistente
- 3 - confronto tra M_{Ed} e M_{Rd}

17/70

Esempio n. 1 individuazione dell'asse neutro

Se l'armatura compressa è snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}} = \frac{(12.56 - 3.08) \times 391}{0.810 \times 30 \times 14.2} = 10.74 \text{ cm}$$

Con questa posizione dell'asse neutro:

$$\varepsilon'_s = \frac{x - c}{x} \varepsilon_{cu} = \frac{10.74 - 5}{10.74} \times 3.5 \times 10^{-3} = 1.87 \times 10^{-3}$$

Poiché $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (1.86×10^{-3}) la posizione trovata è esatta

18/70

Esempio n. 1 individuazione dell'asse neutro

Nota:

Ricordando che l'armatura compressa snervata se

$$\varepsilon'_s = \frac{x-c}{x} \varepsilon_{cu} \geq \varepsilon_{yd}$$

Si ottiene la profondità minima dell'asse neutro affinché l'armatura compressa sia snervata:

$$x \geq \frac{|\varepsilon_{cu}|}{|\varepsilon_{cu}| - \varepsilon_{yd}} c = 2.14 c$$

Per acciaio B450C

Nell'esempio si è ottenuto:

$$x = 10.74 \text{ cm} \geq 2.14 c = 10.70 \text{ cm}$$

19/70

Esempio n. 1 calcolo del momento resistente

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) + N'_s (\kappa x - c)$$

$$N_s = 12.56 \times 391 \times 10^{-1} = 491.1 \text{ kN}$$

$$N'_s = 3.08 \times 391 \times 10^{-1} = 120.4 \text{ kN}$$

$$\kappa = 0.416$$

$$M_{Rd} = [491.1 \times (45 - 0.416 \times 10.74) + 120.4 \times (0.416 \times 10.74 - 5)] \times 10^{-2}$$

$$M_{Rd} = 198.4 \text{ kNm}$$

Si noti che
 $\kappa x \geq c$

Poiché M_{Ed} è minore di M_{Rd} la sezione è verificata 20/70

Esempio n. 2 verifica di sezione rettangolare

Dati:

$$M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$$

Sezione 30x50

Calcestruzzo C25/30

Armature $A_s = 4\phi 20$

Acciaio B450C

$A'_s = 3\phi 20$

Procedura:

1 - individuazione dell'asse neutro

(si può ipotizzare che l'armatura compressa sia snervata, controllare se è vero e in caso contrario passare all'equazione di secondo grado)

2 - determinazione del momento resistente

3 - confronto tra M_{Ed} e M_{Rd}

21/70

Esempio n. 2 individuazione dell'asse neutro

Se l'armatura compressa fosse snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}} = \frac{(12.56 - 9.42) \times 391}{0.810 \times 30 \times 14.2} = 3.56 \text{ cm}$$

Ma poiché la profondità dell'asse neutro è inferiore al limite minimo (2.14 c):

$$x = 3.56 \text{ cm} < 2.14 c = 10.70 \text{ cm}$$

L'armatura compressa non è snervata e ...

22/70

Esempio n. 2 individuazione dell'asse neutro

... bisogna calcolare la profondità dell'asse neutro risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c f_{yd}}{\beta b f_{cd}}} = 7.53 \text{ cm}$$

Che è inferiore al limite minimo (2.14 c):

$$x = 7.53 \text{ cm} < 2.14 c = 10.70 \text{ cm}$$

23/70

Esempio n. 2 individuazione dell'asse neutro

... bisogna calcolare la profondità dell'asse neutro risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c f_{yd}}{\beta b f_{cd}}} = 7.53 \text{ cm}$$

La tensione nell'armatura compressa vale:

$$\sigma'_s = \frac{x-c}{x} \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} = 197.8 \text{ MPa}$$

24/70

Esempio n. 2 calcolo del momento resistente

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) + N'_s (\kappa x - c)$$

$$N_s = 12.56 \times 391 \times 10^{-1} = 491.1 \text{ kN}$$

$$N'_s = 9.42 \times 197.8 \times 10^{-1} = 186.3 \text{ kN}$$

$$\kappa = 0.416$$

$$M_{Rd} = [491.1 \times (45 - 0.416 \times 7.53) + 186.3 \times (0.416 \times 7.53 - 5)] \times 10^{-2}$$

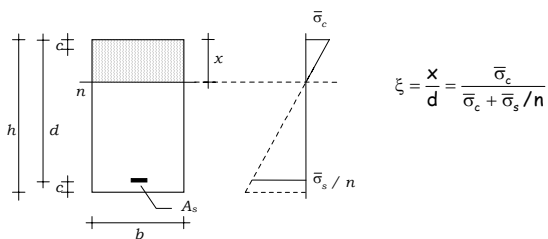
$$M_{Rd} = 202.3 \text{ kNm}$$

Si noti che
 $\kappa x \cong c$

Poiché M_{Ed} è minore di M_{Rd} la sezione è verificata 25/70

Progetto di sezioni inflesse

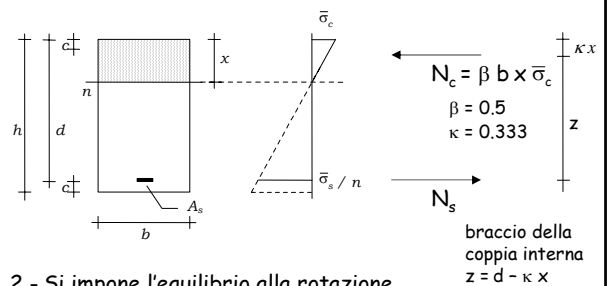
Progetto - tensioni ammissibili



1 - Si assegna il diagramma di tensioni che si vuole avere nella sezione

27/70

Progetto - tensioni ammissibili

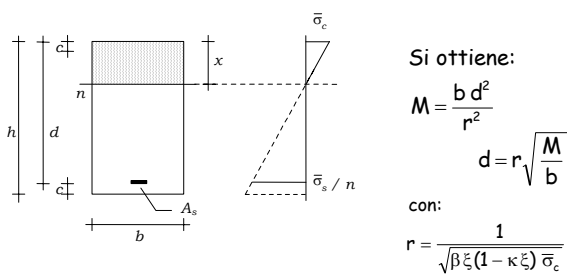


2 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura

$$M = N_c z \quad \boxed{M = \beta b \xi d \bar{\sigma}_c (d - \kappa \xi d)}$$

28/70

Progetto - tensioni ammissibili

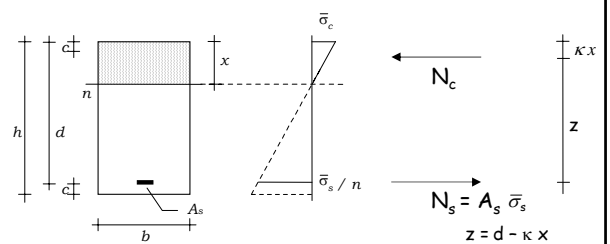


2 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura

$$M = N_c z \quad M = \beta b \xi d \bar{\sigma}_c (d - \kappa \xi d)$$

29/70

Progetto - tensioni ammissibili



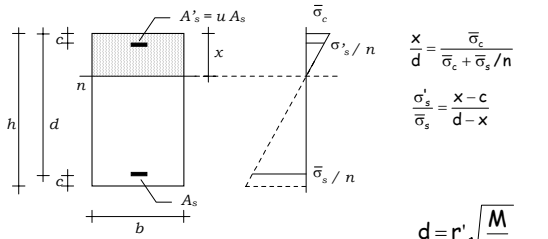
3 - Si impone l'equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante N_c

$$M = N_s z \quad M = A_s \bar{\sigma}_s z$$

$$\boxed{A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s}}$$

30/70

Progetto - tensioni ammissibili



Analogamente per sezione a doppia armatura

r' dipende da u (e da c/d)

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s}$$

31/70

Progetto - stato limite ultimo

Duttilità della sezione

Un parametro fondamentale nel valutare il modo in cui la sezione giunge al collasso è la duttilità.

Duttilità = rapporto tra rotazione ultima e rotazione corrispondente allo snervamento dell'armatura tesa

Una sezione che presenti una rottura duttile dà chiari segnali di preavviso (elevata fessurazione, notevole incremento della deformazione) che possono mettere in allarme e consentire interventi prima del crollo

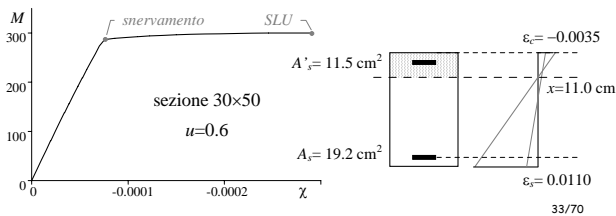
In zona sismica la capacità di deformarsi plasticamente permette di dissipare con cicli isteretici

32/70

Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50 $u=0.6$ $M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$
 $\epsilon_{su} > 10 \times 10^{-3}$ $x=11.0 \text{ cm}$ $\chi=-0.000286$

Buona duttilità

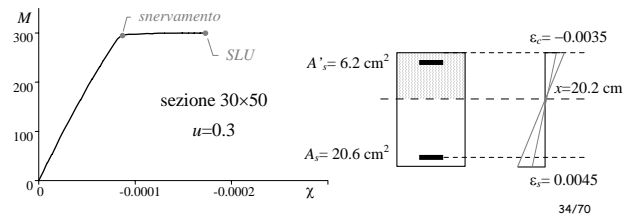


33/70

Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50 $u=0.3$ $M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$
 $\epsilon_{su} = 4.5 \times 10^{-3}$ $x=20.2 \text{ cm}$ $\chi=-0.000184$

Duttilità discreta

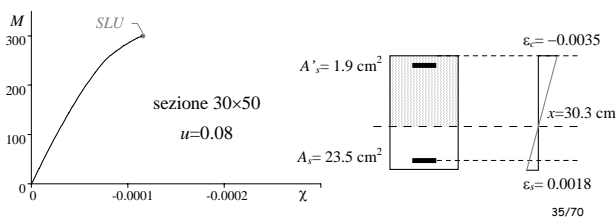


34/70

Duttilità della sezione - esempio

Sezione 30x50 $u=0.08$ $M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$
 $\epsilon_{su} = 1.8 \times 10^{-3}$ $x=30.3 \text{ cm}$ $\chi=-0.000116$

Bassa duttilità



35/70

Duttilità della sezione

- Le sezioni con minore armatura sono più duttili
- La duttilità cresce con la deformazione ϵ_s dell'armatura tesa allo SLU

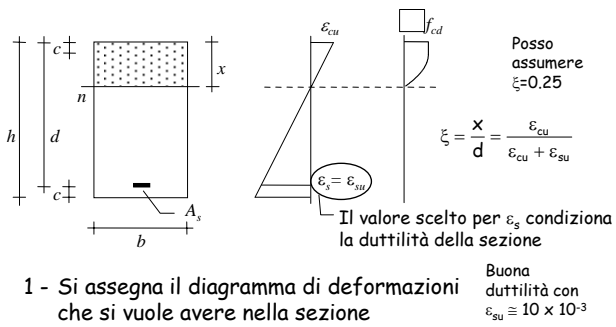
Possiamo classificare le sezioni inflesse:

- ad alta duttilità se $\epsilon_s \geq 0.010$
- a media duttilità se $\epsilon_{yd} < \epsilon_s < 0.010$
- a bassa duttilità se $\epsilon_s \leq \epsilon_{yd}$

Per ottenere sezioni in c.a. duttili le progetteremo sempre assumendo $\epsilon_s \geq 0.010$

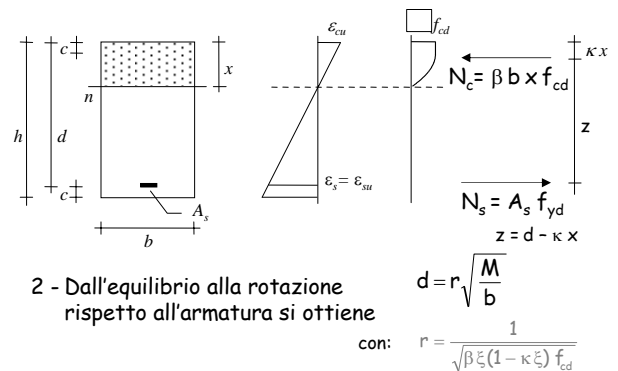
36/70

Progetto - stato limite ultimo

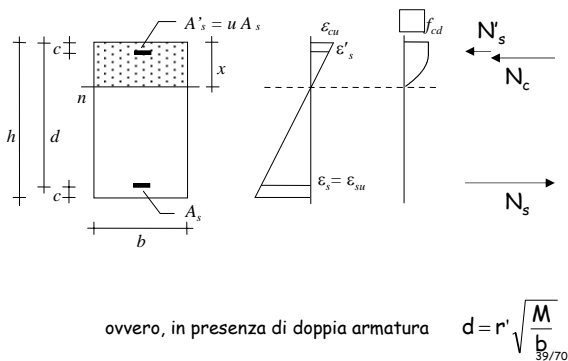


37/70

Progetto - stato limite ultimo

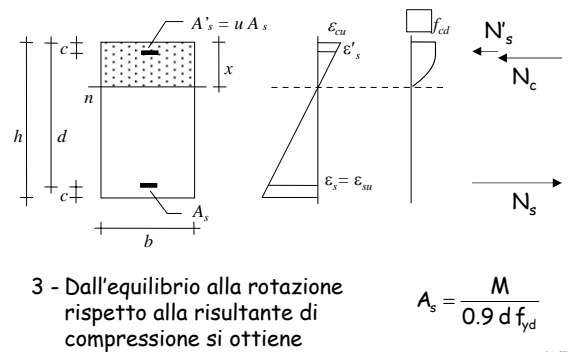


Progetto - stato limite ultimo



39/70

Progetto - stato limite ultimo



40/70

Valori di z/d (C25/30, B450C) sezioni progettate con $\epsilon_c = \epsilon_{cu}$ ed $\epsilon_s = 0.010$ ($\xi = 0.259$)

Tensioni ammissibili

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 0.49$	$s' = 0.42$	$s' = 0.26$
0	0.878		
0.25	0.887	0.881	0.873
0.50	0.896	0.883	0.868
0.75	0.905	0.885	0.863
1.00	0.914	0.888	0.858

Stato limite ultimo

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 1.00$	$s' = 0.42$
0	0.892		
0.25	0.907	0.894	0.884
0.50	0.921	0.896	0.876

Sempre molto prossimo a 0.9

Quanto vale il coefficiente r ?

Tensioni ammissibili:
dipende da calcestruzzo e acciaio

per C25/30 e B450C: $r = 0.0253$

Stato limite ultimo:
dipende solo dal calcestruzzo

per C25/30: $r = 0.0194$

42/70

Esempio n. 1

progetto di sezione a semplice armatura

Tensioni ammissibili: $M = 115 \text{ kNm}$

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0253 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.50 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 55$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s} = \frac{115 \times 10}{0.9 \times 0.50 \times 255} = 10.02 \text{ cm}^2$$

Stato limite ultimo: $M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$

$$d = r \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0194 \sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.45 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 50$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}} = \frac{160 \times 10}{0.9 \times 0.45 \times 391} = 10.10 \text{ cm}^2$$

43/70

Che relazione c'è tra r ed r' ?

Sia per TA che per SLU:

$$r' \cong r \sqrt{1 - s' u} \quad \text{con} \quad s' = \frac{\sigma'_s}{\sigma_{s, \max}} \quad u = \frac{A'_s}{A_s}$$

Si noti che s' dipende principalmente dal copriferro c (o meglio, dal rapporto $\gamma = c/d$)

Ma per TA s' è sempre basso (meno di 0.5)

mentre per SLU s' è molto spesso pari a 1 (è minore solo per travi a spessore)

44/70

Valori di r' (C25/30, B450C)

Tensioni ammissibili

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 0.49$	$s' = 0.42$	$s' = 0.26$
0	0.0253		
0.25	0.0236	0.0239	0.0245
0.50	0.0217	0.0225	0.0238
0.75	0.0198	0.0209	0.0229
1.00	0.0176	0.0192	0.0220

Stato limite ultimo

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 1.00$	$s' = 0.42$
0	0.0194		
0.25	0.0167	0.0168	0.0185
0.50	0.0135	0.0137	0.0174

Nota: $\gamma = 0.05$ per travi emergenti
 $\gamma = 0.20$ per travi a spessore

45/70

Valori di r'/r (C25/30, B450C)

Tensioni ammissibili

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 0.49$	$s' = 0.42$	$s' = 0.26$
0		1.000	
0.25	0.931	0.945	0.970
0.50	0.856	0.888	0.939
0.75	0.781	0.826	0.906
1.00	0.697	0.760	0.871

Travi emergenti

Travi a spessore

Stato limite ultimo

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 1.00$	$s' = 0.42$
0		1.000	
0.25	0.859	0.865	0.951
0.50	0.696	0.706	0.898

Travi emergenti

Travi a spessore

46/70

Contributo dell'armatura compressa

Il contributo dell'armatura compressa nelle verifiche di resistenza allo SLU è diverso da quello fornito nelle verifiche alle TA

Come si vede, ciò è dovuto al fatto che nel caso di stato limite ultimo l'armatura compressa lavora al massimo o quasi ($s' \cong 1$) mentre nel metodo delle tensioni ammissibili essa ha un tasso di lavoro molto più basso di quello ammissibile ($s' \cong 0.2 \div 0.5$)

Le differenze sono significative nel progetto delle travi emergenti e si riducono nel progetto delle travi a spessore

47/70

Quanto è possibile ridurre la sezione grazie all'armatura compressa?

- Aumentando $u = A'_s/A_s$ è possibile ridurre l'altezza della sezione
- Riducendo l'altezza aumenta l'armatura necessaria
- Necessità tecnologiche impongono limiti alla quantità di armatura (ribaditi dalla normativa)

Armatura minima:

$$A_s \geq 0.26 \frac{f_{ctm}}{f_y} b d \geq 0.13 \% b d$$

0.15% per C25/30 e B450C

Armatura massima:

$$A_s \leq 4 \% b h$$

$$A'_s \leq 4 \% b h$$

Percentuale massima consigliata: $1 \div 1.5\%$

48/70

Limiti alle formule di progetto per tener conto dei limiti all'armatura

Imponendo un limite all'armatura tesa:

$$A_s \leq \rho b d \quad \text{con } \rho = 0.010 \div 0.015$$

Si ha: $A_s = \frac{M_{Ed}}{0.9 d f_{yd}} \leq \rho b d$

E quindi:

$$d \geq r_s \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} \quad \text{con} \quad r_s = \sqrt{\frac{1}{0.9 \rho f_{yd}}} \quad \begin{array}{l} = 0.0169 \\ \text{se } \rho = 0.010 \\ = 0.0138 \\ \text{se } \rho = 0.015 \end{array}$$

Non si può utilizzare un valore di r' inferiore a r_s

Suggerisco per r' un limite tra 0.015 e 0.017

49/70

Esempio n. 2

progetto di sezione a doppia armatura ($u=0.25$, $\gamma=0.10$)

Tensioni ammissibili: $M = 115 \text{ kNm}$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0239 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.47 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 55$$

era 0.50 m per $u=0$

Stato limite ultimo: $M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$

$$d = r' \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0168 \sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.39 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 45$$

era 0.45 m per $u=0$

50/70

Esempio n. 2

progetto di sezione a doppia armatura ($u=0.25$, $\gamma=0.10$)

Tensioni ammissibili: $M = 115 \text{ kNm}$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0239 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.47 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 55$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s} = \frac{115 \times 10}{0.9 \times 0.50 \times 255} = 10.02 \text{ cm}^2$$

Stato limite ultimo: $M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$

$$d = r' \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0168 \sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.39 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 45$$

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{0.9 d f_{yd}} = \frac{160 \times 10}{0.9 \times 0.40 \times 391} = 11.36 \text{ cm}^2$$

era 10.10 cm² per $u=0$

Esempio n. 3

progetto di sezione a doppia armatura ($u=0.50$, $\gamma=0.10$)

Tensioni ammissibili: $M = 115 \text{ kNm}$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0225 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.44 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 50$$

era 0.50 m per $u=0$
0.47 m per $u=0.25$

Stato limite ultimo: $M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$

$$d = r' \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = \frac{0.0137}{0.015} \sqrt{\frac{160}{0.30}} = \frac{0.35}{0.31} \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 40$$

era 0.45 m per $u=0$
0.39 m per $u=0.25$

52/70

Esempio n. 3

progetto di sezione a doppia armatura ($u=0.50$, $\gamma=0.10$)

Tensioni ammissibili: $M = 115 \text{ kNm}$

$$d = r' \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.0229 \sqrt{\frac{115}{0.30}} = 0.45 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 50$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d \bar{\sigma}_s} = \frac{115 \times 10}{0.9 \times 0.45 \times 255} = 11.14 \text{ cm}^2$$

era 10.02 cm² per $u=0$

Stato limite ultimo: $M_{Ed} = 160 \text{ kNm}$

$$d = r' \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.015 \sqrt{\frac{160}{0.30}} = 0.35 \text{ m} \quad \text{uso } 30 \times 40$$

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{0.9 d f_{yd}} = \frac{160 \times 10}{0.9 \times 0.35 \times 391} = 12.99 \text{ cm}^2$$

era 10.10 cm² per $u=0$

Progetto allo stato limite ultimo - commento

Si ottengono sezioni trasversali:

- simili a quelle richieste dal metodo delle tensioni ammissibili se non si considera l'armatura compressa
- sensibilmente più basse quando si considera l'armatura compressa

L'armatura tesa:

- é simile a quella richiesta dal metodo delle tensioni ammissibili per sezioni a semplice armatura
- può divenire eccessivamente grande quando si riduce l'altezza della sezioni sfruttando l'effetto positivo dell'armatura compressa

54/70

Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto della sezione assumere un valore $r' = 0.018$ o 0.017

(corrisponde a $0 < u < 25\%$ per C25/30)

Per travi molto basse (a spessore) assumere valori un po' maggiori

$r' = 0.019$ (corrisponde a $0 < u < 25\%$ per C25/30)

Se si ritiene accettabile una percentuale di armatura dell'1.5% si può scendere al valore

$r' = 0.015$ (ma non andare mai al di sotto di questi)

55/70

Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto dell'armatura tesa considerare un braccio della coppia interna pari a $0.9 d$

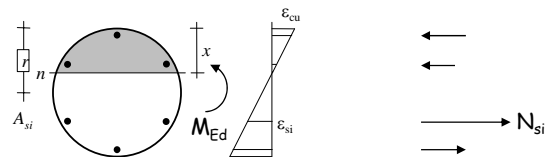
Nota:

Per sezioni a forte armatura (sconsigliate per la carenza di duttilità) il braccio della coppia interna dovrebbe essere minore ($0.8 d$)

56/70

Sezioni di forma generica

Verifica sezione circolare

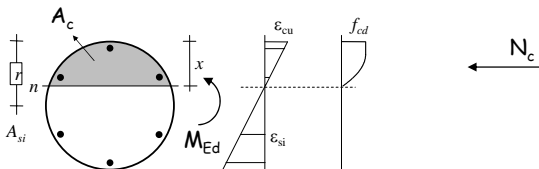


Risultanti delle tensioni nelle armature

$$\begin{array}{ccccc} \varepsilon_{si} & \Rightarrow & \sigma_{si} & \Rightarrow & N_{si} = A_{si} \sigma_{si} \\ \text{(Diagramma } \varepsilon) & & \text{(Legame } \sigma-\varepsilon) & & \end{array}$$

58/70

Verifica sezione circolare



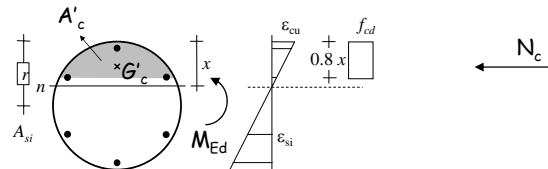
Risultante delle tensioni nel calcestruzzo

$$\cancel{N_c = \beta A_c f_{cd}} \quad \text{Ma quanto vale } \beta? \quad N_c = \int_{A_c} \sigma dA$$

A_c = area di calcestruzzo compresso
o in alternativa ...

59/70

Verifica sezione circolare



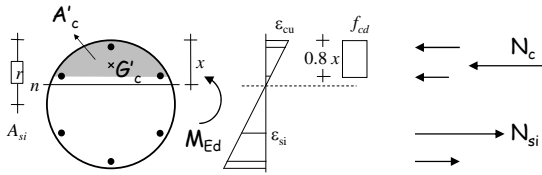
Risultante delle tensioni nel calcestruzzo

$$\cancel{N_c = \int_{A_c} \sigma dA} \Rightarrow N_c = A'_c f_{cd}$$

A'_c = area di calcestruzzo compresso con $\sigma_c \neq 0$
 N_c è applicato nel baricentro di A'_c (G'_c)

60/70

Verifica sezione circolare



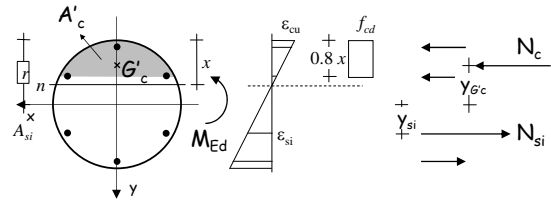
Per l'equilibrio alla traslazione deve essere:

$$N_c + \sum N_{si} = 0$$

Posso ricavare x per tentativi

61/70

Verifica sezione circolare

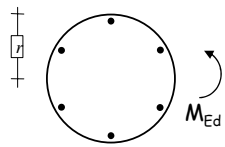


Dall'equilibrio alla rotazione:

$$M_{Rd} = N_c y_{G'_c} + \sum N_{si} y_{si}$$

62/70

Esempio



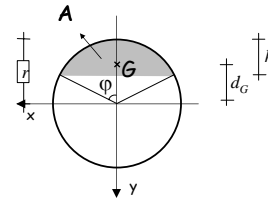
Dati:
Sezione $r = 20 \text{ cm}$
 $c = 4 \text{ cm}$
Armature $6 \varnothing 14$
Calcestruzzo C25/30
Acciaio B450C
 $M_{Ed} = 45 \text{ kNm}$

Procedura:

- 1 - individuazione dell'asse neutro per tentativi
- 2 - determinazione del momento resistente
- 3 - confronto tra M_{Ed} e M_{Rd}

63/70

Calcolo di N_c



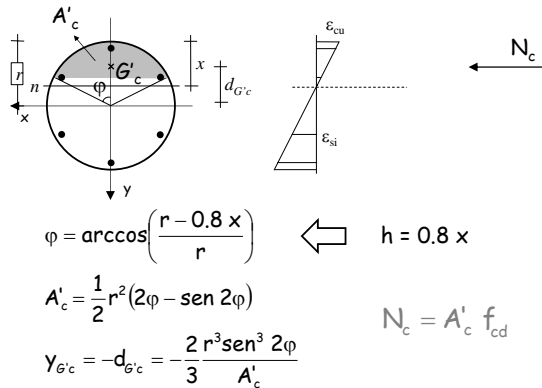
$$\varphi = \arccos\left(\frac{r-h}{r}\right)$$

$$A = \frac{1}{2} r^2 (2\varphi - \sin 2\varphi)$$

$$d_G = \frac{2 r^3 \sin^3 2\varphi}{3 A}$$

64/70

Calcolo di N_c



$$\varphi = \arccos\left(\frac{r-0.8x}{r}\right) \quad \Rightarrow \quad h = 0.8x$$

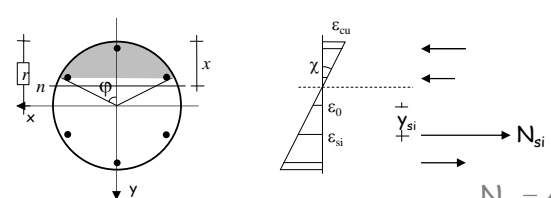
$$A'_c = \frac{1}{2} r^2 (2\varphi - \sin 2\varphi)$$

$$y_{G'_c} = -d_{G'_c} = -\frac{2 r^3 \sin^3 2\varphi}{3 A'_c}$$

$$N_c = A'_c f_{cd}$$

65/70

Calcolo di N_{si}



$$N_{si} = A_{si} \sigma_{si}$$

$$\varepsilon_0 = -\varepsilon_{cu} \left(1 - \frac{r}{x}\right)$$

$$\chi = \frac{\varepsilon_{cu}}{x}$$

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_0 + \chi y_{si}$$

$$\sigma_{si} = -f_{yd}$$

$$\sigma_{si} = E \varepsilon_{si}$$

$$\sigma_{si} = f_{yd}$$

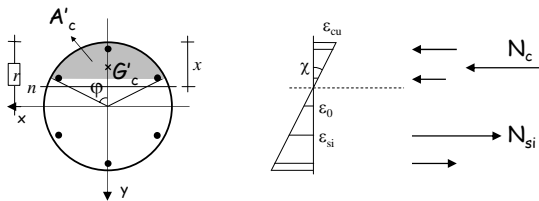
$$\varepsilon_{si} \leq -\varepsilon_{yd}$$

$$-\varepsilon_{yd} < \varepsilon_{si} < \varepsilon_{yd}$$

$$\varepsilon_{si} \geq \varepsilon_{yd}$$

66/70

Determinazione di x



Scelgo $x = 10$ cm (ad esempio)

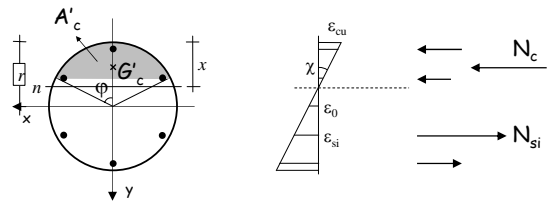
$$N_c = -254.1 \text{ kN}$$

$$N_{s1} = -60.2 \text{ kN}; \quad N_{s2} = 45.3 \text{ kN}; \quad N_{s3} = 120.5 \text{ kN}; \quad N_{s4} = 60.2 \text{ kN}$$

$$N_c + N_{s1} + N_{s1} + N_{s1} + N_{s4} = -88.3 \text{ kN}$$

67/70

Determinazione di x



Per tentativi determino $x = 8.68$ cm

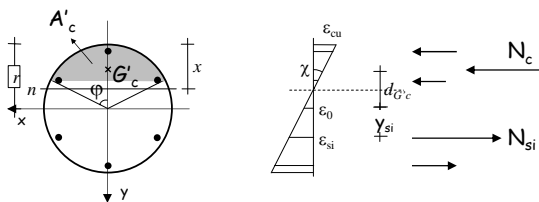
$$N_c = -207.2 \text{ kN}$$

$$N_{s1} = -60.2 \text{ kN}; \quad N_{s2} = 86.7 \text{ kN}; \quad N_{s3} = 120.5 \text{ kN}; \quad N_{s4} = 60.2 \text{ kN}$$

$$N_c + N_{s1} + N_{s1} + N_{s1} + N_{s4} = 0$$

68/70

Determinazione di M_{Rd}



$$N_c = -207.2 \text{ kN}$$

$$N_{s1} = -60.2 \text{ kN}$$

$$N_{s2} = 86.7 \text{ kN}$$

$$N_{s3} = 120.5 \text{ kN}$$

$$N_{s4} = 60.2 \text{ kN}$$

$$y_{G'c} = -15.9 \text{ cm}$$

$$y_{s1} = -16 \text{ cm}$$

$$y_{s2} = -8 \text{ cm}$$

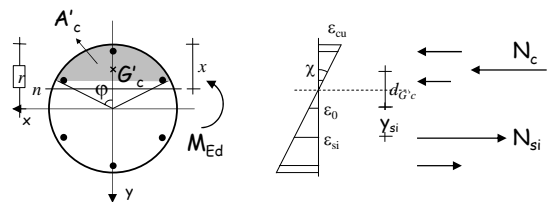
$$y_{s3} = 8 \text{ cm}$$

$$y_{s4} = 16 \text{ cm}$$

$$M_{Rd} = 54.9 \text{ kNm}$$

69/70

Verifica



$$M_{Ed} = 45 \text{ kNm} < M_{Rd} = 54.9 \text{ kNm}$$

La sezione è verificata

70/70